

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



LÊ PHƯƠNG THẢO

**MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC  
TRONG HÌNH HỌC PHẪNG**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2019**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



LÊ PHƯƠNG THẢO

**MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC  
TRONG HÌNH HỌC PHẪNG**

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**

**Mã số: 8 46 01 13**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC  
PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI

**THÁI NGUYÊN - 2019**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----

Lê Phương Thảo

MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC  
TRONG HÌNH HỌC PHẪNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----

Lê Phương Thảo

**MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC  
TRONG HÌNH HỌC PHẪNG**

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp  
Mã số: 8460113

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học:  
**PGS.TS NGUYỄN VIỆT HẢI**

Thái Nguyên - 2019

## Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường đại học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K11 (2018 - 2020) Trường đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

*Hải Phòng, tháng ... năm 20...*

*Người viết Luận văn*

*Lê Phương Thảo*

# Danh mục hình

1.1	Tam giác Pythagore: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . . . . .	4
1.2	Tam giác Heron $[c, e, b + d]$ , đường cao $a$ . . . . .	8
1.3	Tam giác Heron theo sự tăng dần của cạnh lớn nhất . . . . .	12
1.4	Tam giác Pythagore cơ bản và các bán kính $r, r_a, r_b, r_c$ . . . . .	13
1.5	Tính chất các cevian . . . . .	19
2.1	Hai nghiệm là tam giác vuông với $m = 1$ . . . . .	27
2.2	Hai nghiệm là tam giác tù với $m = 2$ . . . . .	29
2.3	Tam giác cạnh tự nhiên ngoại tiếp đường tròn . . . . .	31
3.1	Tứ giác hữu tỷ . . . . .	42
3.2	Tứ giác hữu tỷ của Brahmagupta . . . . .	44
3.3	Độ dài 2 đường chéo, chu vi, diện tích tứ giác . . . . .	45
3.4	Dựng tứ giác Brahmagupta từ tam giác Heron . . . . .	47
3.5	Hai đường chéo $AB, BC \in \mathcal{P}$ . . . . .	52
3.6	(IMO 1968, #1), Cách giải thứ ba . . . . .	54

# Danh mục bảng

1.1	Trích danh sách các tam giác Heron cơ bản . . . . .	11
1.2	Họ tam giác Heron phụ thuộc $\lambda$ , với 10 giá trị $\lambda$ . . . . .	23
2.1	Ba cạnh là cấp số cộng . . . . .	33
2.2	Bài toán $P^2 = nS$ với $n = 31$ . . . . .	38
2.3	Bài toán $P^2 = nS$ với $n = 42$ . . . . .	40

# Mục lục

<b>Giới thiệu luận văn</b>	<b>1</b>
<b>1 Tam giác Pythagore và tam giác Heron</b>	<b>4</b>
1.1 Bài toán tìm tam giác Pythagore và tam giác Heron . . . . .	4
1.1.1 Các bộ ba Pythagore . . . . .	4
1.1.2 Các tam giác Heron . . . . .	7
1.2 Bài toán $HG$ : Tam giác Heron với $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$ . . . . .	10
1.3 Họ các tam giác Heron phụ thuộc $\lambda$ . . . . .	18
<b>2 Tam giác cạnh nguyên với hệ thức giữa <math>S</math> và <math>P</math></b>	<b>24</b>
2.1 Tam giác cạnh nguyên với $S = m.P, m \in \mathbb{N}$ . . . . .	24
2.1.1 Thuật toán Goehl và thuật toán Markov . . . . .	25
2.1.2 Hai trường hợp tham số nguyên . . . . .	32
2.2 Tam giác cạnh nguyên với $P^2 = nS, n \in \mathbb{N}$ . . . . .	35
2.2.1 Trường hợp $n$ là số nguyên tố . . . . .	36
2.2.2 Trường hợp $n$ là hợp số . . . . .	38
2.2.3 Trường hợp riêng: Tam giác Pythagore . . . . .	39
<b>3 Một số vấn đề liên quan</b>	<b>41</b>
3.1 Tứ giác có cạnh và đường chéo hữu tỷ . . . . .	41
3.2 Xác định các yếu tố của tứ giác Brahmagupta . . . . .	45
3.3 Giới thiệu một số bài toán thi Olympic . . . . .	50
<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>58</b>



# Giới thiệu luận văn

## 1. Mục đích của đề tài luận văn

Nhiều bài toán, khái niệm trong hình học liên quan đến số học. Đặc biệt có những bài toán hoàn toàn thuộc lĩnh vực số học như bộ ba Pythagore, tam giác Heron,... Để giải quyết những bài toán này thường phải giải phương trình Diophantine, phương trình Pythagore, phương trình Pell,... và nhiều kiến thức sâu về số nguyên tố nói riêng và số học nói chung. Đề tài này trình bày nhiều vấn đề của số học áp dụng vào hình học, mang lại những kết quả sâu sắc về bài toán hình học giải bằng kiến thức số học. Mục đích của đề tài là:

- Trình bày hai bài toán: tìm các tam giác Pythagore, tìm các tam giác Heron trong trường hợp tổng quát. Nêu ra các thuật toán tìm nghiệm của các bài toán đặt ra. Các trường hợp riêng xác định tam giác Heron: Bài toán  $HG$  tìm tam giác Heron với  $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$ , tam giác có các cạnh lập thành cấp số cộng, lưới nguyên các tam giác Heron,...

- Sử dụng các kiến thức của số học như: lý thuyết chia hết, sự phân tích một số tự nhiên thành các số nguyên tố, giải phương trình Diophantine, các lập luận số học nói chung,... để nghiên cứu một số trường hợp riêng quan trọng của bài toán tìm tam giác cạnh nguyên thỏa mãn một trong ba điều kiện sau

$$S = mP; P^2 = nS \text{ hay } R/r = N \in \mathbb{N}.$$

- Nêu ra các bài toán liên quan và cách giải quyết chúng: Tứ giác hữu tỷ, tứ giác Brahmagupta; Bồi dưỡng năng lực dạy các chuyên đề khó ở trường THCS và THPT góp phần đào tạo học sinh giỏi môn Hình học.

## 2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Dựa vào các tài liệu [2], [3], [4], [6] luận văn trình bày một số bài toán hay về tam giác nguyên và cũng là những bài toán khó hay gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán trong nước và quốc tế. Nội dung luận văn chia làm 3 chương:

### Chương 1. Tam giác Pythagore và tam giác Heron

Bài toán tìm bộ ba Pythagore là bài toán số học quen thuộc, tuy nhiên không thể không nhắc lại các kết quả đã có trong nhiều công trình. Việc làm này cũng coi là bổ sung các kiến thức cơ bản đầu tiên của bài toán đặt ra. Bài toán tìm tam giác Heron dẫn tới nhiều trường hợp riêng thú vị và kết thúc ở một kết quả tổng quát: Họ các tam giác Heron phụ thuộc tham số. Chương này bao gồm:

- 1.1. Bài toán tìm tam giác Pythagore và tam giác Heron
- 1.2. Bài toán  $HG$ : Tam giác Heron với  $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$
- 1.3. Họ các tam giác Heron phụ thuộc  $\lambda$ .

### Chương 2. Tam giác cạnh nguyên với hệ thức giữa $S$ và $P$

Nội dung chương này đề cập đến hai bài toán về tìm tam giác cạnh nguyên thỏa mãn điều kiện phụ: Tìm tam giác cạnh nguyên với  $S = mP$  và tìm tam giác cạnh nguyên với  $P^2 = nS$ . Các kỹ thuật số học được vận dụng giải các phương trình Diophantine dạng đặc biệt dẫn tới các thuật toán giải bài toán bằng các phần mềm tin học. Chương này bao gồm các mục sau:

- 2.1. Tam giác cạnh nguyên với  $S = mP, m \in \mathbb{N}$
- 2.2. Tam giác cạnh nguyên với  $P^2 = nS, n \in \mathbb{N}$ .

### Chương 3. Một số vấn đề liên quan

Chương 3 xét bài toán tam giác nguyên mở rộng cho tứ giác hữu tỷ với phương pháp tiếp cận tương tự 2 chương 1 và 2. Phép dựng tứ giác hữu